数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 1-7

Maximal rigid objects in an orbit category arising from a tube

明海大学歯学部　古谷 貴彦 (Takahiko Furuya)
明海大学歯学部　山内 雅司 (Masashi Yamauchi)

Meikai University, School of Dentistry

概 要

We introduce stable k-rigid objects in a triangulated category, and study their basic properties. As a main result, we completely determine the structures of stable 2-rigid objects in a higher cluster tube.

1 Introduction

Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov ([BMRRT]), Caldero-Chapoton-Schiffler ([CCS]) は，クラスター圏とよばれる 2-カラビ・ヤウ三角圏を導入し，そのクラスター傾斜対象を研究した。また，クラスター傾斜対象とその変異 (mutation) を用いて，Fomin-Zelevinski ([FZ1, FZ2]) が導入したクラスター多元環の圏化を与えた。以後，クラスター圏とその関連分野の研究が盛んに行われ，多くの研究結果が得られている (例えば，[R, BM, I] などを参照)。

こうした研究の中で，Thomas ([T]) はクラスター圏の（カラビ・ヤウ次元の意味での）高次元化である m-クラスター圏 (または，高次元クラスター圏) を導入し，そのクラスター傾斜対象やクラスター多元環の圏化を研究した。m-クラスター圏の定義は次の通りである。m を正の整数とする。K を代数的閉体とし，$\varDelta$ を非輪状な有限クイバーとする。$H = K\varDelta$ を $\varDelta$ の K 上の道多元環とする。H の有界導来圏を $D^b(H)$ で表す。$D^b(H)$ におけるシフトを $[1]$ で表し，$D^b(H)$ におけるアウスランダー・ライテン移動を τ で表す。このとき，自己同値 $\tau^{-1}[m] : D^b(H) \to D^b(H)$ による軌道圏

$$\mathcal{A}_m(H) := D^b(H)/\tau^{-1}[m]$$

が得られる。$\mathcal{A}_m(H)$ を m-クラスター圏 (または，高次元クラスター圏) とよぶ。$m = 1$ のとき，$\mathcal{A}_1(H)$ は [BMRRT] におけるクラスター圏に他ならない。$\mathcal{A}_m$ は $(m+1)$-カラビ・ヤウ三角圏であり，また，常に m-クラスター傾斜対象をもつことが知られている ([B, K, T])。

本稿では，不変 k-リジッド対象とよばれる極大 k-リジッド対象を導入し，その基本性質を与える。また，高次元クラスター圏と同様にして定まる高次元クラスターチューブを導入し，その極大 2-リジッド対象の構造を詳細に述べる。

2 高次元クラスターチューブ

K を代数的閉体とし，$n \geq 2$ を整数とする。ランク n のチューブ $\mathcal{T}_n$ とは，n 個の頂点をもつ巡回クイバーの有限次元ベキ零 K-表現のなす圏を言う。$\mathcal{T}_n$ は遺伝的アーベル圏であり，アウスランダー・ライテン系列をもつことが知られている。また，$\mathcal{T}_n$ のアウスランダー・ライテンクイバー $\Gamma_{\mathcal{T}_n}$ は，ランク n の安定チューブ (stable tube) である。$\mathcal{T}_n$ の有

界導来圏を $\mathcal{D}_n$ で表す。$\mathcal{D}_n$ はクルル・シュミット三角圏であり，アウスランダー・ライテン三角をもつ ([H])。$\mathcal{D}_n$ におけるシフトを [1] で表し，アウスランダー・ライテン移動を $\tau(=\tau_{\mathcal{D}_n})$ で表す。

m を正の整数とする。本稿では，関手の合成 $\tau^{-1}[m]:\mathcal{D}_n\to\mathcal{D}_n$ によって定まる軌道圏

$$\mathcal{C}_{n,m}:=\mathcal{D}_n/\tau^{-1}[m]$$

を考察する。$\mathcal{C}_{n,m}$ を高次元クラスターチューブ（または，m-クラスターチューブ）とよぶことにする。$m=1$ のとき，$\mathcal{C}_{n,1}$ は [BMV] で導入されたクラスターチューブであり，クラスター傾斜対象をもたない 2-カラビ・ヤウ三角圏であることが示されている。また，[V, Y] において，クラスターチューブにおける極大リジッド対象およびその自己準同型環の構造が調べられている。

$\pi:\mathcal{D}_n\to\mathcal{C}_{n,m}$ を軌道圏についての標準的関手とする。また，簡単のためにユークリッドクイバー $\widetilde{A}_{n-1,1}$ $(n\geq 2)$ に対する道多元環 $K\widetilde{A}_{n-1,1}$ を Λ_n で表す。このとき，軌道圏の定義から次を得る。

Lemma 2.1. $\mathcal{C}_{n,m}$ は m-クラスター圏 $\mathcal{A}_m(\Lambda_n)$ の三角充満部分圏であり，π は三角関手である。

$\mathcal{C}_{n,m}$ における suspension functor を [1] で表すことにする。また，$\operatorname{ind}\mathcal{T}_n[i]$，$\operatorname{ind}\mathcal{C}_{n,m}$ によって，$\mathcal{T}_n[i]$ $(0\leq i\leq m-1)$ と $\mathcal{C}_{n,m}$ の直既約対象の同型類の集合（あるいは，その同型類の完全代表系）をそれぞれ表す。

[BMRRT] と同様な方法，または，$\mathcal{C}_{n,m}$ が $\mathcal{A}_m(\Lambda_n)$ の三角充満部分圏であることから，容易に次の性質を得る。

Lemma 2.2. (a) $\mathcal{C}_{n,m}$ はクルル・シュミット圏であり，π は集合 $\bigcup_{i=0}^{m-1}(\operatorname{ind}\mathcal{T}_n[i])$ と $\operatorname{ind}\mathcal{C}_{n,m}$ の間の一対一対応を与える。

(b) $\mathcal{C}_{n,m}$ はアウスランダー・ライテン三角をもち，それらは $\mathcal{D}_n$ におけるアウスランダー・ライテン三角の π による像である。

(c) $D:=\operatorname{Hom}_K(-,K)$ とする。そうすると，双関手的同型 (bifunctorial isomorphism)

$$D\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{n,m}}(X,Y)\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{n,m}}(Y,\tau X[1])\quad (X,Y\in\mathcal{C}_{n,m})$$

が存在する。ここで，$\tau\,(=\tau_{\mathcal{C}_{n,m}})$ は $\mathcal{C}_{n,m}$ におけるアウスランダー・ライテン移動を表す。したがって，$\mathcal{C}_{n,m}$ は，セール関手 $\tau[1]$ をもつ

(d) $\mathcal{C}_{n,m}$ において，$\tau[1]=[m+1]$ である。よって，$\mathcal{C}_{n,m}$ は $(m+1)$-カラビ・ヤウ三角圏である。

(セール関手，カラビ・ヤウ三角圏の定義については Section 3 に記す。)

Remark 2.3. (a) 一般に $\mathcal{C}_{n,m}$ には，$m=1$ の場合 ([BMV]) と同様，m-クラスター傾斜対象が存在しないことが分かる。

(b) $\mathcal{C}_{n,m}$ のアウスランダー・ライテンクイバー $\Gamma_{\mathcal{C}_{n,m}}$ は，$\Gamma_{\mathcal{T}_n}$ に $[i]$ $(i=0,\ldots,m-1)$ を施して得られる m 個の安定チューブ $\Gamma_{\mathcal{T}_n}[i]$ $(i=0,\ldots,m-1)$ と見なすことができる。

3 不変k-リジッド対象

以後，$\mathcal{B}$ を K-線形で Hom-有限なクルル・シュミット三角圏とする。

Definition 3.1 ([IY, KR]). k を正の整数とし，T を $\mathcal{B}$ の対象とする。このとき，

(a) T が k-リジッド対象 (k-rigid object) であるとは，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(T,T)=0$ $(1\leq \forall i\leq k)$ であるときを言う。

(b) T が極大 k-リジッド対象 (maximal k-rigid object) であるとは，

$$\operatorname{add} T=\{X\in\mathcal{B}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(T\oplus X,T\oplus X)=0\ (1\leq\forall i\leq k)\}$$

であるときを言う。

(c) T が k-クラスター傾斜対象 (k-cluster tilting object) であるとは，

$$\begin{aligned}\operatorname{add} T&=\{X\in\mathcal{B}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(T,X)=0\ (1\leq\forall i\leq k)\}\\&=\{X\in\mathcal{B}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(X,T)=0\ \ (1\leq\forall i\leq k)\}\end{aligned}$$

であるときを言う。

明らかに，k-クラスター傾斜対象は，極大 k-リジッド対象である。$k=1$ のとき，極大 1-リジッド対象を，単に極大リジッド対象とよび，1-クラスター傾斜対象を，単にクラスター傾斜対象とよぶ。以後，k-リジッド対象は，すべて basic とする。

関手 $\mathbb{S}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ がセール関手であるとは，$\mathbb{S}$ が圏の同値であり，ある双関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)\simeq D\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,\mathbb{S}X)\quad (X,\,Y\in\mathcal{B})$$

が存在するときを言う。ただし，$D:=\mathrm{Hom}_K(-,K)$ である。$\mathcal{B}$ がセール関手 $\mathbb{S}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ が存在するとき，$\mathcal{B}$ はアウスランダー・ライテン三角をもち，$\mathbb{S}=\tau[1]$ であることが知られている ([RV])。ここで，$\tau\,(=\tau_{\mathcal{B}})$ は $\mathcal{B}$ におけるアウスランダー・ライテン移動，[1] は $\mathcal{B}$ におけ suspension functor である。

d を正の整数とする。セール関手 $\mathbb{S}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ が存在するとき，$\mathcal{B}$ が d-カラビ・ヤウ三角圏であるとは，$\mathbb{S}=[d]$，つまり，$\tau=[d-1]$ でるときをいう。

ここでは，次のように定義される対象を考察する。

Definition 3.2. k を正の整数とする。$\mathcal{B}$ の対象 T が，不変 k-リジッド対象 (stable k-rigid object) であるとは，次が成り立つときを言う:

$$\begin{aligned}\operatorname{add} T&=\{X\in\mathcal{B}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(X,T\oplus X)=0\ (1\leq\forall i\leq k)\}\\&=\{X\in\mathcal{B}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}}(T\oplus X,X)=0\ (1\leq\forall i\leq k)\}.\end{aligned}$$

次の命題では，$\mathcal{B}$ がセール関手をもつとする。定義から次のことが分かる。

Proposition 3.3. k を正の整数とし，T を $\mathcal{B}$ の対象とする。このとき，次は同値である。

(a) T は不変 k-リジッド対象である。

(b) T は極大 k-リジッド対象であり，$\tau_{\mathcal{B}}^{-1}T[k] = T$.

(c) $\operatorname{add} T = \{X \in \mathcal{B} \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{B}}(X, T \oplus X) = 0\ (1 \le \forall i \le k)\}$ であり，$\tau_{\mathcal{B}}^{-1}T[k] = T$.

(d) $\operatorname{add} T = \{X \in \mathcal{B} \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{B}}(T \oplus X, X) = 0\ (1 \le \forall i \le k)\}$ であり，$\tau_{\mathcal{B}}^{-1}T[k] = T$.

$\mathcal{B}$ が $(m+1)$-カラビ・ヤウ三角圏のとき，不変 m-リジッド対象は極大 m-リジッド対象に他ならない。また，$\mathcal{B}$ が m-クラスター圏 ([T]) のとき，不変 m-リジッド対象，極大 m-リジッド対象，m-クラスター傾斜対象は，すべて一致する ([W, ZZ])。

4 高次元クラスターチューブの不変 2-リジッド対象

以後，n，m，k を $2 \le n$，$1 \le m$，$1 \le k \le m$ となる整数とする。

本稿の目的は，高次元クラスターチューブ $\mathcal{C}_{n,m}$ における不変 2-リジッド対象の構造を述べることである。主結果の前に，いくつかの定義と記号を導入する。

まず，$\Gamma_{\mathcal{T}_n}$ ($=$ ランク n の安定チューブ) に座標系を導入する。$\Gamma_{\mathcal{T}_n}$ における単純対象 S を 1 つ取り，それを $(1,1)$ で表す。また，$\tau^{-a}S$ $(a = 1, \dots, n-1)$ を $(a+1,1)$ で表す。さらに，$\ell(M) = b$，$\operatorname{soc} M = (a,1)$ である直既約対象 M を (a,b) で表す。このとき，$\mathcal{C}_{n,m}$ の直既約対象は $(a,b)[i]$ $(1 \le a \le n;\ 1 \le b;\ 0 \le i \le m-1)$ と書くことができる。よって，$\Gamma_{\mathcal{T}_n}[i]$ は次のようなクイバーとなる。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
(n-1,3)[i] \arrow[dr] & & (n,3)[i] \arrow[dr] & & (1,3)[i] & \cdots & & & (n,3)[i] \arrow[dr] & & (1,3)[i] \\
& (n,2)[i] \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2)[i] \arrow[ur] & & \cdots & & (n,2)[i] \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2)[i] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
-- (n,1)[i] \arrow[ur] \arrow[rr, dash] & & (1,1)[i] \arrow[ur] \arrow[rrrr, dash, dashed] & & & & (n,1)[i] \arrow[ur] \arrow[rr, dash] & & (1,1)[i] \arrow[ur] \arrow[rr, dash] & & (2,1)[i] --
\end{tikzcd}
$$

明らかに $\ell((a,b)[i]) = b$ である。以降，座標 (a,b) の x 座標 a は，n を法として考えることにする。

X を $\Gamma_{\mathcal{C}_{n,m}}$ の頂点とし，$\ell(X) \le n-1$ とする。X をトップとするランク $\ell(X)$ の翼 (wing) を $\mathcal{W}_X$ で表す。T を $\mathcal{C}_{n,m}$ の対象とし，$X = (a,b)[i]$ $(1 \le a \le n;\ 2 \le b \le n-1;\ 0 \le i \le m-1)$ とおく。このとき，T の直既約直和因子の同型類のうち，$\mathcal{W}_X \cup \mathcal{W}_{(a+1,b-1)[i+1]}$ に属する同型類全体の集合を $\overline{\mathcal{W}}_X^T$ で表す。

Definition 4.1. $X = (a,b)[i] \in \mathcal{C}_{n,m}$ $(1 \le a \le n;\ 2 \le b \le n-1;\ 0 \le i \le m-1)$ とする。また，Y, Z, U を $\mathcal{C}_{n,m}$ の直既約対象とする。

(a) (X,Y) が colored subwing double であるとは，$Y = (a,b-1)[i]$, $Y = (a+1,b-1)[i]$, $Y = (a+1,b-1)[i+1]$ のいずれかが成り立つときを言う。

(b) $(X;Y,Z)$ が colored subwing triple であるとは，ある整数 c $(1 \le c \le b-2)$ に対して，次のいずれかが成り立つときを言う:

 (i) $Y = (a,c)[i]$，$Z = (a+c+1, b-c-1)[i]$.

 (ii) $Y = (a,c)[i]$，$Z = (a+c+1, b-c-1)[i+1]$.

(iii) $Y=(a+1,c)[i+1]$, $Z=(a+c+1,b-c-1)[i]$.

(c) $(X;Y,Z,U)$ が colored subwing quadruple であるとは，ある整数 c, $d\,(1\le c\le b-3;\ 1\le d\le b-c-2)$ に対して，$Y=(a,c)[i]$, $Z=(a+c+1,d)[i+1]$, $U=(a+c+d+1,b-c-d-1)[i]$ であるときを言う。

以上を用いて，$\mathcal{C}_{n,m}$ の 2-リジッド対象を考察する。m が偶数の場合は次の定理を得る。

Theorem 1. $n\ge 2$ を整数とし，q を正の整数とする。

(a) $\mathcal{C}_{n,2q+1}$ が不変 2-リジッド対象をもつ必要十分条件は，$n\mid q-1$ である。

(b) $n\mid q-1$ とする。T を $\mathcal{C}_{n,2q+1}$ の basic な対象とする。T が不変 2-リジッド対象である必要十分条件は，T が次の (1)–(4) の条件をみたすことである。

(1) $T=\bigoplus_{j=0}^{2q-1}T_j[j]$ とする。ただし，$T_j\in\mathcal{T}_n\,(0\le j\le 2q-1)$ である。このとき，$T_{2j}=\tau^{-j}T_0$, $T_{2j+1}=\tau^{-j}T_1(1\le\forall j\le q-1)$.

(2) 任意の T の直既約直和因子に対して，その長さは $n-1$ 以下である。

(3) 次のいずれかが成り立つ：

(i) T のある直既約直和因子で，長さが $n-1$ のものが存在する。

(ii) T のある直既約直和因子 X,Y について，$X=M[0]$, $Y=N[1]$ となる。ここで，M,N は次をみたす対象である:

$$M,\ N\in\mathcal{T}_n,\quad \tau^{-\ell(M)-1}(\operatorname{soc}M)=\operatorname{soc}N,\quad \tau^{-\ell(N)}(\operatorname{soc}N)=\operatorname{soc}M.$$

(4) X は T の直既約直和因子で，$X\in(\operatorname{ind}\mathcal{T}_n[0])\cup(\operatorname{ind}\mathcal{T}_n[1])$ をみたすとする。このとき，次のいずれかが存在する。

(i) colored subwing double (X,Y) で，$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]}\setminus\{X[2j]\}\right)\subseteq\bigcup_{j=0}^{q-1}\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]}$.

(ii) colored subwing triple $(X;Y,Z)$ で，

$$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]}\Big\backslash\{X[2j]\}\right)\subseteq\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]}\cup\overline{\mathcal{W}}^T_{Z[2j]}\right).$$

(iii) colored subwing quadruple $(X;Y,Z,U)$ で，

$$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]}\Big\backslash\{X[2j]\}\right)\subseteq\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]}\cup\overline{\mathcal{W}}^T_{Z[2j]}\cup\overline{\mathcal{W}}^T_{U[2j]}\right).$$

m が奇数の場合は次の定理を得る。

Theorem 2. $n\ge 2$ を整数とし，q を正の整数とする。

(a) $\mathcal{C}_{n,2q+1}$ が不変 2-リジッド対象をもつ必要十分条件は，$n=2q-1$ である。

(b) T を $\mathcal{C}_{2q-1,2q+1}$ の basic な対象とする。T が不変 2-リジッド対象である必要十分条件は，T が次の (1)–(4) の条件をみたすことである。

(1) $T = \bigoplus_{j=0}^{2q} T_j[j]$ とする。ただし，$T_j \in \mathcal{T}_n\,(0 \le j \le 2q)$ である。このとき，$T_{2j} = \tau^{-j}T_0\ (1 \le \forall j \le q)$，$T_{2j+1} = \tau^{-q-j}T_0\ (0 \le \forall j \le q-1)$.

(2) 任意の T の直既約直和因子に対して，その長さは $q-1$ 以下である。

(3) T のある直既約直和因子で，その長さが $q-1$ のものが存在する。

(4) X は T の直既約直和因子で，$X \in (\mathrm{ind}\,\mathcal{T}_n[0]) \cup (\mathrm{ind}\,\mathcal{T}_n[1])$ をみたすとする。このとき，次のいずれかが存在する。

(i) colored subwing double (X, Y) で，$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]} \backslash \{X[2j]\}\right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{q-1}\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]}$.

(ii) colored subwing triple $(X; Y, Z)$ で，

$$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]} \Big\backslash \{X[2j]\}\right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]} \cup \overline{\mathcal{W}}^T_{Z[2j]}\right).$$

(iii) colored subwing quadruple $(X; Y, Z, U)$ で，

$$\bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{X[2j]} \Big\backslash \{X[2j]\}\right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{q-1}\left(\overline{\mathcal{W}}^T_{Y[2j]} \cup \overline{\mathcal{W}}^T_{Z[2j]} \cup \overline{\mathcal{W}}^T_{U[2j]}\right).$$

なお，**Theorem 1** (4) と **Theorem 2** (4) は同じ条件である。

参考文献

[B] A. B. Buan, *An Introduction to Higher Cluster Categories*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 37 (2011), 137–157.

[BM] A. B. Buan and R. J. Marsh, *Cluster-Tilting Theory*, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, Contemporary Mathematics 406 (2006), 1–30.

[BMRRT] A. B. Buan, R. J. Marsh, M. Reineke, I. Reiten and G. Todorov, *Tilting Theory and Cluster Combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), 572–618.

[BMV] A. B. Buan, R. J. Marsh and D. F. Vatne, *Cluster Structures from 2-Calabi-Yau Categories with Loops*, Algebra Represent. Theory 165 (2010), 951–970.

[CCS] P. Caldero, F. Chapoton and R. Schiffler, *Quivers with Relations Arising from Clusters (A_n case)*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 1347–1364.

[FZ1] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497–529.

[FZ2] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebras. II. Finite Type Classification*, Invent. Math. 154 (2003), 63–121.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, LMS Lecture Note Series 119, Cambridge University Press 1988.

[I] 伊山修，クラスター圏，第 51 回代数学シンポジウム（東京大学）2006，報告集.

[IY] O. Iyama and Y. Yoshino, *Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules*, Invent. Math. 172 (2008), 117–168.

[K] B. Keller, *On Triangulated Orbit Categories*, Doc. Math. 10 (2005), 551–581.

[KR] B. Keller and I. Reiten, *Cluster-Tilted Algebras are Gorenstein and Stably Calabi-Yau*, Adv. Math. 211 (2007), 123–151.

[R] I. Reiten, *Cluster Categories*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010, Volum I, 558–594.

[RV] I. Reiten and M. Van den Bergh, *Noetherian Hereditary Abelian Categories Satisfying Serre Duality*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 295–366.

[T] H. Thomas, *Defining an m-Cluster Category*, J. Algebra 318 (2007), 37–46.

[V] D. F. Vatne, *Endomorphism Rings of Maximal Rigid Objects in Cluster Tubes*, Collq. Math. 123 (2011), 63–93.

[W] A. Wrålsen, *Rigid Objects in Higher Cluster Categories*, J. Algebra 321 (2009), 532–547.

[Y] D. Yang, *Endomorphism Algebras of Maximal Rigid Objects in Cluster Tube*, Comm. Algebra 40 (2012), 4347–4371.

[ZZ] Y. Zhou and B. Zhu, *Cluster Combinatorics of d-Cluster Categories*, J. Algebra 321 (2009), 2898–2915.